

Работа по математике для 9 класса,
1 вариант

1. Упростите выражение: $\left(\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}} - \frac{1}{a+\sqrt{2}}\right) \div \left(\frac{a^2}{\sqrt{2}} - a + \sqrt{2}\right)^{-1}$

Решение:
$$\left(\frac{a^2+4}{(a+\sqrt{2}) \cdot (a^2-a\sqrt{2}+2)} - \frac{1}{a+\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{a^2-a\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \frac{a\sqrt{2}+2}{(a+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}} = 1$$

Ответ: 1

2. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-6x+9} + (\sqrt{4-x^2})^2 = 1$

Решение: $|x-3| + 4 - x^2 = 1$, при этом $4 - x^2 \geq 0$, то есть $-2 \leq x \leq 2$. На полученном промежутке $x-3 \leq 0$. Получаем уравнение $-x+3+4-x^2=1$; $x^2+x-6=0$ и $-2 \leq x \leq 2$.

Ответ: 2

3. Решите неравенство: $\frac{|x+3|-2}{x^2+8x+15} \geq 0$

Решение: Рассматриваем два случая:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \frac{x-1}{(x+3) \cdot (x+5)} \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+3 < 0 \\ \frac{-x-5}{(x+3) \cdot (x+5)} \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (-5; -3) \cup [1; +\infty)$

4. Пять различных чисел составляют арифметическую прогрессию. Если удалить ее второй и третий члены, то три

оставшихся числа составят геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

Решение: Пусть числа $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ - члены арифметической прогрессии. По условию числа $a-2d, a+d, a+2d$ образуют геометрическую прогрессию, то есть $(a+d)^2 = (a-2d) \cdot (a+2d)$. Из этого равенства получаем:
 $d=0 \Rightarrow q=1$ или $d=-0,4 \Rightarrow q=\frac{1}{3}$

Ответ: 1 или $\frac{1}{3}$. Принимался ответ и без $q=1$, так как это

значение знаменателя иногда исключают из определения геометрической прогрессии.

5. Постройте график функции $y = \frac{(x+1) \cdot (x^2-4x+3)}{x-1}$ и найдите прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

Решение: $y = \frac{(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)}{x-1} \Leftrightarrow y = x^2 - 2x - 3, x \neq 1$

Графиком данной функции является парабола с «выколотой» вершиной. Удовлетворяющие условию прямые: ось ординат и прямая, проходящая через «выколотую» вершину параболы.

Ответ: $x=0, y=-4x$.

6. В окружность радиуса 6 вписан треугольник, одна сторона которого равна 6, а другая - $6\sqrt{3}$. Найдите площадь этого треугольника.

Решение: Возможны два случая. 1) стороны треугольника 6; 6 и $6\sqrt{3}$. 2) стороны треугольника 6; $6\sqrt{3}$ и 12. Это следует из того, что хорда длиной 6 стягивает дугу в 60 градусов, а $6\sqrt{3}$ - дугу в 120 или 240 градусов.

Ответ: $9\sqrt{3}$; $18\sqrt{3}$.

7. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 25$, а высота, опущенная на сторону AB , равна 20. Найдите синус угла B .

Решение: Площадь параллелограмма равна $20AB$ или $25AB \sin \angle B$, отсюда $\sin \angle B = 0,8$

Ответ: 0,8.

8. По кругу в некотором порядке по одному разу записаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель. Могло ли получиться так, что все эти наибольшие общие делители а) равны единице, б) попарно различны?

Ответ: а) да, пример: 9,14,15,16,11,18,13,12,17,10 (возможен и другой пример)

б) нет, всевозможные попарные делители этого набора чисел 1;2;3; 4;5;6;9, а пар чисел 10.

2 вариант

1. Упростите выражение: $\left(\frac{\sqrt{a^3+1}}{a-1} - \frac{a}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1+a^{-0.5}} \right)^{-1}$

Решение: $\left(\frac{(\sqrt{a+1}) \cdot (a-\sqrt{a+1})}{(\sqrt{a-1}) \cdot (\sqrt{a+1})} - \frac{a}{\sqrt{a+1}} - \frac{1}{\sqrt{a-1}} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a} \right) = 1$

Ответ: 1

2. Решите уравнение: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + (\sqrt{1 - x^2})^2 = 1$

Решение: $|x-2| + 1 - x^2 = 1$, при этом $1 - x^2 \geq 0$, то есть $-1 \leq x \leq 1$. На полученном промежутке $x-2 \leq 0$. Получаем уравнение $-x + 2 + 1 - x^2 = 1$; $x^2 + x - 2 = 0$ и $-1 \leq x \leq 1$.

Ответ: 1

3. Решите неравенство: $\frac{|x| + 2x - 3}{x^2 - 7x + 6} \leq 0$

Решение: Рассматриваем два случая:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{3x-3}{(x-1) \cdot (x-6)} \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{x-3}{(x-1) \cdot (x-6)} \leq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; 6)$

4. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если первые два оставить без изменения, а к третьему прибавить сумму первых двух, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найти знаменатель этой геометрической прогрессии.

Решение: Пусть числа $a-d, a, a+d$ - члены заданной геометрической прогрессии. По условию числа $a-d, a, 3a$ образуют геометрическую прогрессию.

Ответ: 3

5. Постройте график функции $y = \frac{(x-1) \cdot (x^2 + 4x + 3)}{x+1}$ и найдите прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

Решение: $y = \frac{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+3)}{x+1} \Leftrightarrow y = x^2 + 2x - 3, x \neq -1$

Графиком данной функции является парабола с «выколотой» вершиной. Удовлетворяющие условию прямые: ось ординат и прямая, проходящая через «выколотую» вершину параболы.

Ответ: $x = 0, y = 4x$.

6. В окружность радиуса 10 вписан треугольник, одна сторона которого равна 10, а другая - $10\sqrt{3}$. Найдите площадь этого треугольника.

Решение: Возможны два случая. 1) стороны треугольника 10; 10 и $10\sqrt{3}$. 2) стороны треугольника 10; $10\sqrt{3}$ и 20. Это следует из

того, что хорда длиной 10 стягивает дугу в 60 градусов, а $10\sqrt{3}$ - дугу в 120 или 240 градусов.

Ответ: $25\sqrt{3}; 50\sqrt{3}$.

7. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 28$, а высота, опущенная на сторону AB , равна 14. Найдите синус угла B .

Решение: Площадь параллелограмма равна $14AB$ или $28AB \sin \angle B$, отсюда $\sin \angle B = 0,5$

Ответ: 0,5.

8. По кругу в некотором порядке по одному разу записаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель. Могло ли получиться так, что все эти наибольшие общие делители а) равны единице, б) попарно различны?

Решение: а) да, пример: 10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21.

б) нет, всевозможные попарные делители этого набора чисел 1;2;3; 4;5;6;7, 10, а пар чисел 12.